Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Lars Poppe
Dr. Andreas Vollmer

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 23 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(4 Punkte)* Zeige, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ stetig ist.

Lösung. Wir zeigen zunächst, dass exp im Punkt $x = 0$ stetig ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|\exp(x_n) - 1| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n|^k}{k!} = |x_n| \left(1 + \frac{|x_n|}{2!} + \frac{|x_n|^2}{3!} + \dots\right).$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n| \leq 1$ für $n \geq N$. Damit folgt für $n \geq N$

$$|x_n| \left(1 + \frac{|x_n|}{2!} + \frac{|x_n|^2}{3!} + \dots\right) \leq |x_n| \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) = |x_n|(\exp(1) - 1) < 2|x_n|.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1 = \exp(0)$. Also ist exp stetig in $x = 0$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig und wieder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann gilt

$$|\exp(x + x_n) - \exp(x)| = \exp(x)|\exp(x_n) - 1|$$

und wegen $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} |\exp(x + x_n) - \exp(x)| = 0$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x + x_n) = \exp(x),$$

und somit ist exp in x stetig. ■

Aufgabe 2: *(2+2 Punkte)*

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Beweise die Äquivalenz

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gibt es eine stetige Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\hat{f}(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{Q}$? Führe hierzu einen Beweis.

Lösung.

(a) Die Richtung "$\Longrightarrow$" ist offensichtlich.
"$\Longleftarrow$": Es seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ also zwei stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Weiter sei $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann existiert eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Da alle y_n rational sind, gilt $f(y_n) = g(y_n)$ und wegen der Stetigkeit von f und g folgt, dass

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y).$$

Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Im Allgemeinen existiert kein solches $\hat{f}$, was wir durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen. Betrachte dazu die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2}, \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass f stetig auf $\mathbb{Q}$ ist, aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

Wir zeigen zunächst, dass f stetig ist. Sei also $x \in \mathbb{Q}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Setzen wir $\varepsilon := |x - \sqrt{2}|$, so gibt es wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\exists N \in \mathbb{N} \ : \ |x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Ist nun $x > \sqrt{2}$, dann gilt für $n \geq N$, dass $x_n > \sqrt{2}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 = f(x).$$

Ist $x < \sqrt{2}$, dann gilt für $n \geq N$ entsprechend, dass $x_n < \sqrt{2}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x).$$

Damit ist f für alle $x \in \mathbb{Q}$ folgenstetig und damit stetig.

Gäbe es nun ein $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, so wäre f insbesondere in $x = \sqrt{2}$ stetig. Sei $(x_n)_{n\to\infty}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $x_n > \sqrt{2}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ sowie $(y_n)_{n\to\infty}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $y_n < \sqrt{2}$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{2}$. Wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ würde dann gelten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}(y_n) = \hat{f}(\sqrt{2}).$$

Es gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(y_n) = 0\,, \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \hat{f}(x_n) = 1.$$

Widerspruch! Also kann f nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

■

Aufgabe 3: *(1+1 Punkte)*

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+|nx|}$$

gegebene Funktion f (wohl)definiert?

(b) In welchen Punkten ist die Funktion f aus (a) stetig?

Lösung.

(a) Wir schreiben für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}.$$

Offensichtlich gilt bei $x = 0$, dass $f_n(0) = 0$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und somit ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{nx}{1+|nx|} = \frac{x}{\frac{1}{n}+|x|}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Also gilt für $x > 0$, dass

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = 1,$$

und für $x < 0$, dass

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = -1.$$

Die Funktion f ist damit für alle $x \in \mathbb{R}$ (wohl)definiert.

(b) Aus Teil (a) folgt unmittelbar, dass gilt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Also ist f unstetig im Punkt $x = 0$ und stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

■